

Второй тур 27.11.2025. Вторая лига.

1. Пусть $n > 1000$ — натуральное число. Из квадрата $n \times n$ вырезали несколько клеток. Могло ли оказаться, что для любого натурального $k < n$ количество способов вырезать клетчатую полосу длины k из оставшегося множества клеток является квадратом натурального числа? Клетчатой полоской длины k мы называем любой клетчатый прямоугольник $k \times 1$ и $1 \times k$.

2. На описанной окружности Ω остроугольного треугольника ABC выбрана точка P , а на окружности девяти точек — точка Q . Докажите, что сумма расстояний от P до касательных к Ω в точках A , B и C не меньше удвоенного расстояния от точки Q до касательной к Ω в точке P .

3. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n такова, что последовательность $\text{НОД}(a_1, a_2), \text{НОД}(a_2, a_3), \dots, \text{НОД}(a_{n-1}, a_n)$ является строго возрастающей. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

4. В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и точка пересечения высот соответственно. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекают прямые AC и AB в точках E и F соответственно. Прямые BO и CH пересекаются в точке P , а прямые CO и BH пересекаются в точке Q . Оказалось, что $EF \perp BC$. Докажите, что $OP = OQ$.

5. Даны ненулевые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, $\deg P < \deg Q$. Докажите, что существует единственная последовательность многочленов $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$ с вещественными коэффициентами такая, что $0 < \deg H_1 < \deg H_2 < \dots < \deg H_n$ и

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_1 H_2} + \dots + \frac{1}{H_1 H_2 \dots H_n}.$$

6. Внутри правильного 2025-угольника M выбрана точка P , не лежащая ни на одной из его диагоналей. Назовем треугольник *примечательным*, если его вершины являются вершинами многоугольника M . Для каждой диагонали AB многоугольника M Петя посчитал сумму площадей примечательных треугольников со стороной AB , лежащих по ту же сторону от прямой AB , что и точка P , а Вася — сумму площадей примечательных треугольников со стороной AB , лежащих по другую сторону от прямой AB , нежели точка P . Затем каждый из мальчиков сложил все свои результаты. Могло ли оказаться, что у Пети и Васи получились одинаковые числа?

7. Пусть n, k и m — натуральные числа, причем $n > 2k$. Пусть \mathcal{F} — семейство k -элементных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Оказалось, что каждое $(k+1)$ -элементное подмножество $\{1, \dots, n\}$ содержит в себе ровно m подмножеств из \mathcal{F} . Докажите, что в \mathcal{F} присутствуют все k -элементные подмножества $\{1, 2, \dots, n\}$.

8. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(m^2 + m + n) = f(m)^2 + f(m) + f(n)$$

для любых натуральных m и n .

9. У Саши и Ильи есть граф с 2025 вершинами без рёбер. Вершины пронумерованы числами $1, 2, \dots, 2025$. Саша и Илья делают ходы по очереди, начинает Саша. За один ход игрок проводит одно ребро, при этом в графе не должно появиться кратных рёбер и циклов. После проведения ребра между вершинами i и j ему присваивается вес $|i - j|$. Когда рёбер больше проводить нельзя, считается сумма весов всех проведенных ребер. Саша стремится сделать ее как можно большей, а Илья — как можно меньшей. Чему будет равна эта сумма при правильной игре?

10. Назовем два натуральных числа 2999-*похожими*, если из них можно вычеркиваем цифр получить одно и то же натуральное число, делящееся на 2999. Верно ли, что для любого натурального k существуют k натуральных чисел, делящихся на 2999, любые два из которых не являются 2999-похожими?

Второй тур 27.11.2025. Третья лига.

1. Пусть $n > 1000$ — натуральное число. Из квадрата $n \times n$ вырезали несколько клеток. Могло ли оказаться, что для любого натурального $k < n$ количество способов вырезать клетчатую полосу длины k из оставшегося множества клеток является квадратом натурального числа? Клетчатой полоской длины k мы называем любой клетчатый прямоугольник $k \times 1$ и $1 \times k$.

2. В треугольнике ABC точка M — середина AB , а точка D на стороне BC такова, что $BD = 2CD$ и $AD = 2DM$. Найдите $\angle ACB$.

3. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n такова, что последовательность $\text{НОД}(a_1, a_2), \text{НОД}(a_2, a_3), \dots, \text{НОД}(a_{n-1}, a_n)$ является строго возрастающей. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

4. В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и точка пересечения высот соответственно. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекают прямые AC и AB в точках E и F соответственно. Прямые BO и CH пересекаются в точке P , а прямые CO и BH пересекаются в точке Q . Оказалось, что $EF \perp BC$. Докажите, что $OP = OQ$.

5. Даны ненулевые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, $\deg P < \deg Q$. Докажите, что существует единственная последовательность многочленов $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$ с вещественными коэффициентами такая, что $0 < \deg H_1 < \deg H_2 < \dots < \deg H_n$ и

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_1 H_2} + \dots + \frac{1}{H_1 H_2 \dots H_n}.$$

6. Внутри правильного 2025-угольника M выбрана точка P , не лежащая ни на одной из его диагоналей. Назовем треугольник *примечательным*, если его вершины являются вершинами многоугольника M . Для каждой диагонали AB многоугольника M Петя посчитал сумму площадей примечательных треугольников со стороной AB , лежащих по ту же сторону от прямой AB , что и точка P , а Вася — сумму площадей примечательных треугольников со стороной AB , лежащих по другую сторону от прямой AB , нежели точка P . Затем каждый из мальчиков сложил все свои результаты. Могло ли оказаться, что у Пети и Васи получились одинаковые числа?

7. В физматшколе 120 учеников. Среди них очень популярны 10 Телеграм-каналов по комбинаторике: у каждого канала в школе не менее 85 подписчиков! Докажите, что Александр Викторович, у которого нет Телеграма, может выбрать двух школьников и узнать у них всё, что пишут в этих каналах (потому что на каждый канал подписан хотя бы один из них).

8. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(m^2 + m + n) = f(m)^2 + f(m) + f(n)$$

для любых натуральных m и n .

9. Паша рисует граф на 2025 вершинах и 999 ребрах, в котором нет циклов. Затем он нумерует вершины числами $1, 2, 3, \dots, 2025$. Верно ли, что после этого Игорь всегда сможет провести тысячное ребро в графе Паши так, чтобы разность номеров вершин на его концах была хотя бы 1500 и в графе по-прежнему не было циклов?

10. Назовем два натуральных числа 2999-похожими, если из них можно вычеркиваем цифр получить одно и то же натуральное число, делящееся на 2999. Верно ли, что для любого натурального k существуют k натуральных чисел, делящихся на 2999, любые два из которых не являются 2999-похожими?